

2 Mengen

Menge

Die Summenformel

Die leere Menge

Das kartesische Produkt

Die Produktformel

Die Potenzmenge

Die Binomialzahlen

Der Binomialsatz

Unendliche Mengen



2.1 Menge

Oft wird die definierte Menge durch einen Buchstaben o.ä. bezeichnet. Man kann dann diese Menge leicht benennen: „Sei g ein Element von G , dann ...“

In diesem Fall wird aus $\mathbf{N}$ (und nicht etwa aus $\mathbf{Z}$) ausgewählt. Das heißt, als Elemente der zu definierenden Menge kommen von vornherein nur natürliche Zahlen in Frage.

Bei einer Definition wird mit dem Doppelpunkt angedeutet, auf welcher Seite der Begriff steht, der gerade definiert wird. Hier wird die Menge G definiert.

Insgesamt handelt es sich hier um die Definition einer Menge durch eine Eigenschaft. Links des senkrechten Strichs ist vermerkt, aus welcher Obermenge die Elemente ausgewählt werden, rechts davon steht die Eigenschaft, aufgrund derer die Elemente ausgewählt werden.

$$G := \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ ist ein Vielfaches von } 2\}$$

Mengenklammern. Mengen werden immer so bezeichnet. Am einfachsten, indem man ihre Elemente aufzählt, zum Beispiel:
 $M = \{1, 2, 3\}$ oder
 $M = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$.

Elementzeichen. $x \in X$ bedeutet, dass das Element x in der Menge X enthalten ist. Zum Beispiel gilt $2 \in \{1, 2, 3\}$. Die Negation wird mit $\notin$ („nicht Element von“) bezeichnet. Zum Beispiel gilt $0 \notin \{1, 2, 3\}$.

Das ist die Bedingung bzw. die Eigenschaft, die die Elemente der neuen Mengen erfüllen müssen. In diesem Fall muss die Zahl gerade sein. Allgemein könnte man für die Mengendefinition schreiben:
 $M := \{x \in X \mid E(x)\}$. Dann enthält die Menge M alle Elemente der Menge X , die die Eigenschaft E haben. Es kommt übrigens nicht darauf an, dass die Eigenschaft formal ausgedrückt wird; es ist durchaus möglich, diese auch verbal zu formulieren.

Aufgaben, Tests, Herausforderungen

1. Beschreiben Sie folgende Mengen als Teilmengen von $\mathbf{N}$ durch eine Eigenschaft:

$$\{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$\{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

$$\{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

$$\{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$$

$$\{0, 1, 3, 7, 15, \dots\}$$

$$\{1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots\}$$

2. Beschreiben Sie folgende Mengen verbal:

$$\{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 5\}$$

$$\{n \in \mathbf{N} \mid n-3 \in \mathbf{N}\}$$

$$\{n \in \mathbf{N} \mid n/3 \in \mathbf{N}\}$$

$$\{n \in \mathbf{N} \mid (n-1)/3 \in \mathbf{N}\}$$

$$\{n \in \mathbf{N} \mid \sqrt{n} \in \mathbf{N}\}$$

3. Beschreiben Sie folgende Mengen geometrisch, indem Sie diese als Mengen von Punkten des $\mathbf{R}^2$ auffassen:

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, y = 2x - 5\}$$

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, 2x + 3y = 5\}$$

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, x = 1\}$$

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, y = 1\}$$

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, xy = 1\}$$

$$\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}, x^2 - y^2 = 1\}$$

4. Beschreiben Sie folgende Teilmengen des $\mathbf{R}^2$ ähnlich wie in der vorigen Aufgabe:

- Die Parallele zur x-Achse im Abstand 2,
- die erste Winkelhalbierende,
- die Normalparabel,
- den Kreis mit Mittelpunkt (2, 3) und Radius 5.



2.2 Die Summenformel

Durch die beiden senkrechten Striche wird die *Mächtigkeit* der Menge A bezeichnet, also die Anzahl ihrer Elemente. Zum Beispiel ist $|\{1,2,3\}| = 3$.

A und B sind *endliche* Mengen, das heißt Mengen mit einer endlichen Anzahl von Elementen.

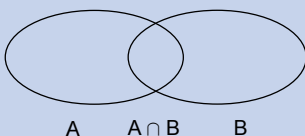
Von der Summe der Mächtigkeiten von A und B wird die Mächtigkeit des Durchschnitts der Mengen abgezogen. Wenn der Durchschnitt gleich der leeren Menge ist, vereinfacht sich die Summenformel zu $|A \cup B| = |A| + |B|$.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Die *Vereinigung* von A und B. In der Vereinigung der Mengen A und B liegen genau die Elemente, die in A oder in B enthalten sind. Zum Beispiel ist $\{a,b,c\} \cup \{b,c,d\} = \{a,b,c,d\}$.

Der *Durchschnitt* (die „Schnittmenge“) von A und B. Im Durchschnitt der Mengen A und B liegen genau die Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind. Zum Beispiel ist $\{a,b,c\} \cap \{b,c,d\} = \{b,c\}$.

Man kann die Summenformel durch ein „Venn-Diagramm“ illustrieren:



Beweis der Summenformel: Die Vereinigung $A \cup B$ teilt sich auf in die disjunkten Mengen $A \setminus B$, $A \cap B$ und $B \setminus A$. Daher gilt $|A \cup B| = (|A| - |A \cap B|) + (|B| - |A \cap B|) + |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

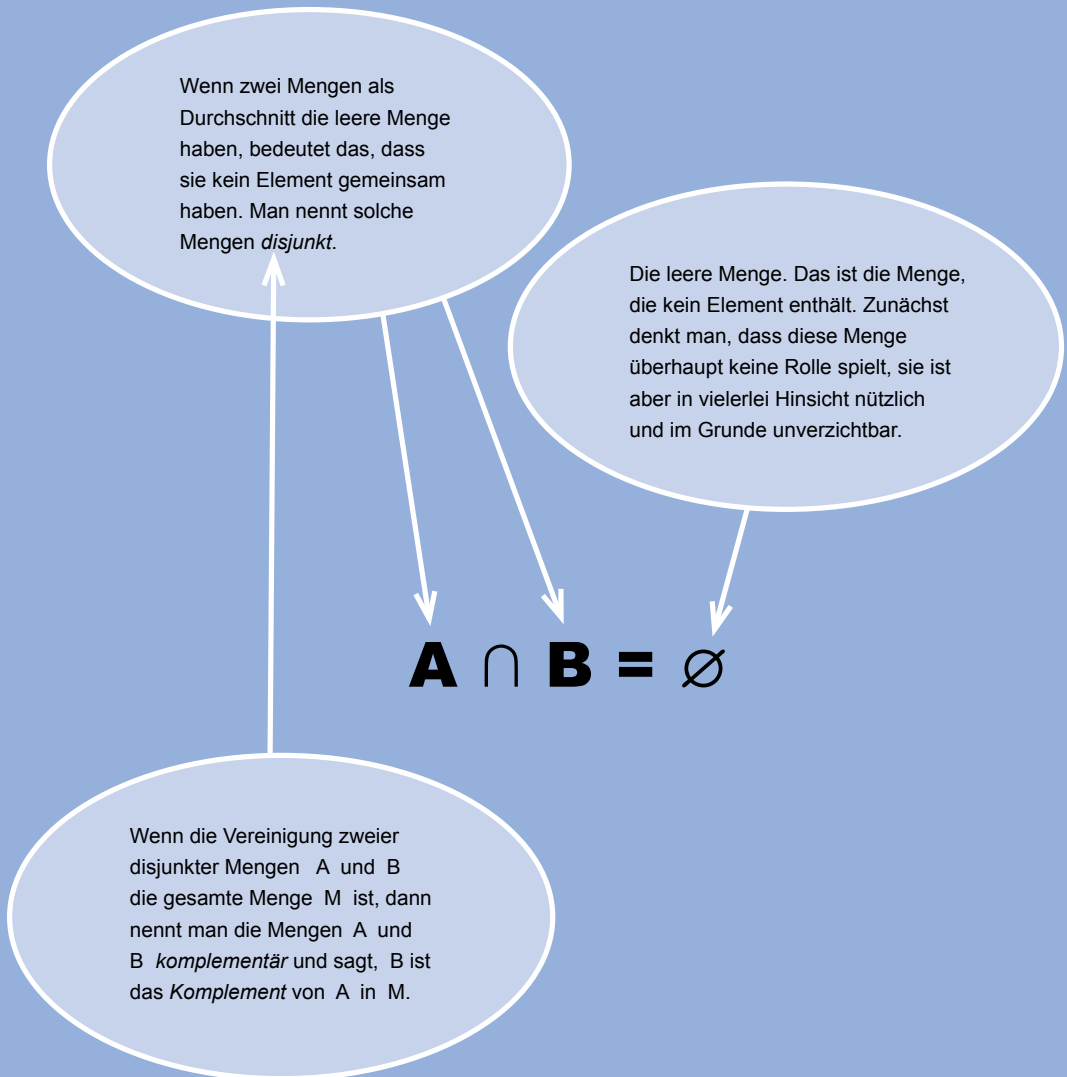
Aufgaben, Tests, Herausforderungen

1. An der Universität Mathlandia studieren 657 Studenten Mathematik und 842 Biologie, wobei 289 beide Fächer studieren. Wie viele studieren Mathematik oder Biologie?
2. Von den 32 Schülerinnen und Schülern einer Klasse gehen 27 gerne in Discos und 18 mögen Mathematik. Was kann man über die Zahl derer aussagen, die sowohl gerne Discos besuchen als auch Mathe mögen?
3. Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm (Mengen-Diagramm) für drei Mengen A, B, C.
4. Formulieren Sie die Summenformel für drei Mengen.
5. Beweisen Sie die Summenformel für drei Mengen.
6. Die Summenformel für n Mengen findet man in der Literatur auch unter dem „Prinzip der Inklusion und Exklusion“. Warum?

Übrigens: Venn-Diagramme sind nach dem englischen Theologen und Logiker John Venn (1834–1923) benannt.



2.3 Die leere Menge



Aufgaben, Tests, Herausforderungen

1. Bestimmen Sie unter den folgenden Mengen die Paare disjunkter Mengen:

$\{1, 2, 4, 8\}$

$\{2, 4, 6, 8\}$

$\{1, 3, 5, 7\}$

$\{2, 3, 5, 7\}$

$\{2, 3, 6, 7\}$

$\{1, 2, 4, 5\}$

2. Bestimmen Sie unter den folgenden Mengen die Paare disjunkter Mengen:

- Menge der ungeraden natürlichen Zahlen
- Menge der geraden natürlichen Zahlen
- Menge der positiven Quadratzahlen
- Menge der Primzahlen
- Menge der durch 9 teilbaren natürlichen Zahlen

3. Wie lautet die Summenformel für disjunkte Mengen?

Bemerkung: Das Zeichen $\emptyset$ für die leere Menge soll eine durchgestrichene Null sein. Vor allem in Schulbüchern findet man auch die Bezeichnung $\{ \}$ für die leere Menge.



2.4 Das kartesische Produkt

- ▶ Das kartesische Produkt der Mengen A und B besteht aus Paaren, wobei ein Element aus A und das andere aus B kommt.
Schon in dieser umschreibenden Erklärung wird deutlich, dass das kartesische Produkt keine Teilmenge von A oder B ist, sondern dass seine Elemente etwas Neues sind.
- ▶ Das kartesische Produkt der Mengen A und B besteht aus den Paaren (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.
Die Elemente des kartesischen Produkts, nämlich die Paare (a, b) , werden benannt.
- ▶ Das kartesische Produkt der Mengen A und B wird mit $A \times B$ bezeichnet. Seine Elemente sind die Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.
Hier wird in verbaler Form schon ziemlich klar gesagt, was das kartesische Produkt ist.
- ▶ Das kartesische Produkt der nichtleeren Mengen A und B ist die Menge $A \times B$, deren Elemente die Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ sind.
An dieser Stelle wird eine kleine, aber wichtige Voraussetzung eingeführt, nämlich, dass weder A noch B die leere Menge ist. Wenn A die leere Menge wäre, könnte man kein $a \in A$ wählen.
- ▶ Seien A und B nichtleere Mengen. Dann wird durch $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ eine Menge definiert, die man das kartesische Produkt von A und B nennt.
Jetzt steht alles richtig und ordentlich da.

Aufgaben, Tests, Herausforderungen

1. Beschreiben Sie explizit die Elemente des kartesischen Produkts der Mengen A und B:

$$A = \{0, 1\}, B = \{X, Y, Z\},$$

$$A = \{X, Y, Z\}, B = \{0, 1\},$$

$$A = \{X, Y, Z\}, B = \{X, Y, Z\},$$

$$A = \{0, 1\}, B = \{0, 1\}.$$

2. Für welche Mengen A, B gilt $A \times B = B \times A$?

3. Gilt folgendes „Distributivgesetz“?

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

3. Definieren Sie das kartesische Produkt $A \times B \times C$ von drei Mengen A, B, C.

4. Definieren Sie das kartesische Produkt für beliebig viele Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$.

5. Das kartesische Produkt $A \times A$ einer nichtleeren Menge mit sich selbst bezeichnet man auch als A^2 . Allgemein bezeichnet man das n-fache kartesische Produkt von A mit sich selbst als A^n . Sei $A = \{0, 1\}$. Bestimmen Sie explizit die Mengen A^2, A^3, A^4 .

Übrigens: „Kartesisch“ kommt letztlich von René Descartes (1596–1650). Dieser Philosoph und Mathematiker hat Koordinaten in die Geometrie eingeführt. Seit dieser Zeit identifizieren wir die Punkte der Ebene mit Paaren (x, y) reeller Zahlen. Descartes heißt auf Lateinisch Cartesius (damals wurden alle Namen „latinisiert“) . Daher kommt die Bezeichnung „cartesisch“ oder „kartesisch“.



2.5 Die Produktformel





<http://www.springer.com/978-3-658-14647-4>

Mathe-Basics zum Studienbeginn

Survival-Kit Mathematik

Beutelspacher, A.

2016, IX, 227 S., Softcover

ISBN: 978-3-658-14647-4